Ad-Soyad: CEVAPLAR **24.01.2020**

Numara: **İmza:**

SOYUT MATEMATİK I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) Grup, halka, denklik bağıntısı, sıralama bağıntısı ve ayrışım tanımlarını yaparak birer örnek veriniz.

2) **a)** $(p \Rightarrow r) \vee (q' \Leftrightarrow r)$ önermesi yanlış ise p, q, r önermelerinin değerlerini bulunuz.

b) $(p' \Leftrightarrow q)'$ önermesinin denk olduğu önermeyi bulunuz.

3) Bir kümenin alt kümelerinden oluşan küme ailesi $\{A_i\}_{i\in I}$ olsun.

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

olur mu? Gösteriniz.

4) $H \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $*, H$ üzerinde değişme ve birleşme özellikleri olan bir ikili işlem olsun. $\forall\, u, v \in H$ için $u * u = u$ ise

$$u \sim v \Leftrightarrow u * v = v$$

biçiminde tanımlanan $\sim$, H kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz.

5) f ve g birer fonksiyon olmak üzere

a) $g \circ f$ birebir ise f birebirdir,

b) $g \circ f$ örten ise g örtendir,

gösteriniz.

BAŞARILAR

1) **Grup:** $*$, A kümesi üzerinde ikili işlem olsun. Birleşme, birim eleman ve ters eleman özellikleri sağlanıyorsa $(A, *)$ cebirsel yapısına grup denir.

$(\mathbb{Z}, +)$ bir gruptur.

Halka: A kümesi üzerinde $\circ$ ve $*$ ikili işlemleri tanımlansın.

i) $(A, \circ)$ değişmeli gruptur.

ii) $*$ işleminin birleşme özelliği vardır.

iii) $*$ işleminin $\circ$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

koşulları sağlanıyorsa $(A, \circ, *)$ cebirsel yapısına halka denir.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir halkadır.

Denklik Bağıntısı: R, A üzerinde bir bağıntı olsun. R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa R ye A üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için

$x R y \iff 4 \mid x-y$ biçiminde tanımlanan R bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Sıralama Bağıntısı: R, A üzerinde bir bağıntı olsun. R bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa R ye A üzerinde bir sıralama bağıntısı denir.

$\mathbb{Z}$ kümesinde $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için

$aRb \iff a \leq b$ biçiminde tanımlanan R bir sıralama bağıntısıdır.

Ayrışım: $A \neq \emptyset$, $B_i \subseteq A$ ve $i \in I$ olsun.

i) $\forall i \in I$ için $B_i \neq \emptyset$

ii) $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \emptyset$

iii) $\bigcup_{i \in I} B_i = A$

özellikleri sağlanıyorsa $\{B_i : i \in I\}$ küme ailesine A kümesinin bir ayrışımı denir.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$B_1 = \{1,2\}$ $\quad B_2 = \{3,4,5\}$ $\quad B_3 = \{6\}$ $\quad B_4 = \{7,8,9,10\}$

$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ ailesi A nın bir ayrışımıdır.

2) a) $(p \Rightarrow r) \vee (q' \Leftrightarrow r) \equiv 0$

$(p \Rightarrow r) \equiv 0$, $(q' \Leftrightarrow r) \equiv 0$ ($\vee$ nin tanımından)

$p \equiv 1$, $r \equiv 0$ $\quad q' \equiv 1 \Rightarrow q \equiv 0$

b) $(p' \Leftrightarrow q)' \equiv [(p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')]'$ ($\Leftrightarrow$ tanımı)

$\equiv [(p')' \vee q] \wedge (q' \vee p')]'$ ($\Rightarrow$ tanımı)

$\equiv [(p \vee q) \wedge (q' \vee p')]'$

$\equiv [((p \vee q) \wedge q') \vee [p \vee q \wedge p']]'$

$\equiv [(p \wedge q') \vee \overset{0}{(q \wedge q')} \vee [\overset{0}{(p \vee p')} \vee (q \wedge p')]]'$

$\equiv [((p \wedge q') \vee 0) \vee [0 \vee (q \wedge p')]]'$

$\equiv [(p \wedge q') \vee (q \wedge p')]'$

$\equiv (p \wedge q')' \wedge (q \wedge p')'$ (De Morgan Kuralları)

$\equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p)$ (De Morgan Kuralları)

$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ($\Rightarrow$ tanımı)

$\equiv p \Leftrightarrow q$ ($\Leftrightarrow$ tanımı)

3) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ olsun. $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},A\}$ ve
$P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{3\},B\}$ olur.
$P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},A,B\}$, $A\cup B=\{1,2,3\}$
$P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},A,B,\{2,3\},A\cup B\}$
$\{2,3\}\in P(A\cup B)$ için $\{2,3\}\notin P(A)\cup P(B)$ $\therefore$ $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$

4) Yansıma özelliği: $\forall u\in H$ için $u\sim u$ olmalıdır. $*$ işleminin verilen özelliğinden $\forall u\in H$ için $u*u=u \Rightarrow u\sim u$ olduğundan yansıma özelliği sağlanır.

Simetri özelliği: $\forall u,v\in H$ için $u\sim v$ iken $v\sim u$ mudur?

$u\sim v \Rightarrow u*v=v$
$\Rightarrow v*u=v$ ($*$, H üzerinde değişmeli olduğundan)

$v\sim u$ olması için $\sim$ tanımından $v*u=u$ olmalıydı.

O halde simetri özelliği sağlanmaz.

$\therefore$ $\sim$ bağıntısı denklik bağıntısı değildir.

5) a) $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ iki fonksiyon olsun.

$g\circ f$ birebir $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X$ için $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$
$\Rightarrow x_1=x_2$

f birebir fonksiyon $\overset{?}{\Leftrightarrow} \forall x_1,x_2\in X$ için $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$\forall x_1,x_2\in X$ için $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \forall x_1,x_2\in X$ için $g(f(x_1))=g(f(x_2))$
$\Rightarrow \forall x_1,x_2\in X$ için $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$
$\Rightarrow x_1=x_2$ $\therefore$ f birebirdir.

b) $g\circ f$ örten $\Rightarrow \forall z\in Z$ için $\exists x\in X$ var öyle ki: $(g\circ f)(x)=z$

g örten $\overset{?}{\Leftrightarrow} \forall z\in Z$ için $\exists y\in Y$ var öyle ki: $g(y)=z$

$g\circ f$ örten $\Rightarrow \forall z\in Z$ için $\exists x\in X$ $(g\circ f)(x)=z$
$\Rightarrow \forall z\in Z$ için $\exists x\in X$ $g(\underbrace{f(x)}_{\in Y})=z$
$\Rightarrow \forall z\in Z$ için $\exists y\in Y$ $g(y)=z$
$\Rightarrow g$ örten bir fonksiyondur.